4.5 Αμφιέρειστες πλάκες

Οι αμφιέρειστες πλάκες στηρίζονται σε δύο απέναντι παρυφές, όπως η s1 στην εικόνα της §4.1.

Αν μία αμφιέρειστη πλάκα στηρίζεται επιπρόσθετα σε μία ή δύο ακόμη παρυφές και ο λόγος του μεγαλύτερου προς το μικρότερο θεωρητικό άνοιγμα είναι μεγαλύτερος του 2.0 (πλάκα s3 στην ίδια εικόνα), υπολογίζεται ως αμφιέρειστη προς την κύρια διεύθυνση, ενώ λαμβάνονται υπ' όψη και οι δευτερεύουσες εντάσεις στις υπόλοιπες παρυφές.

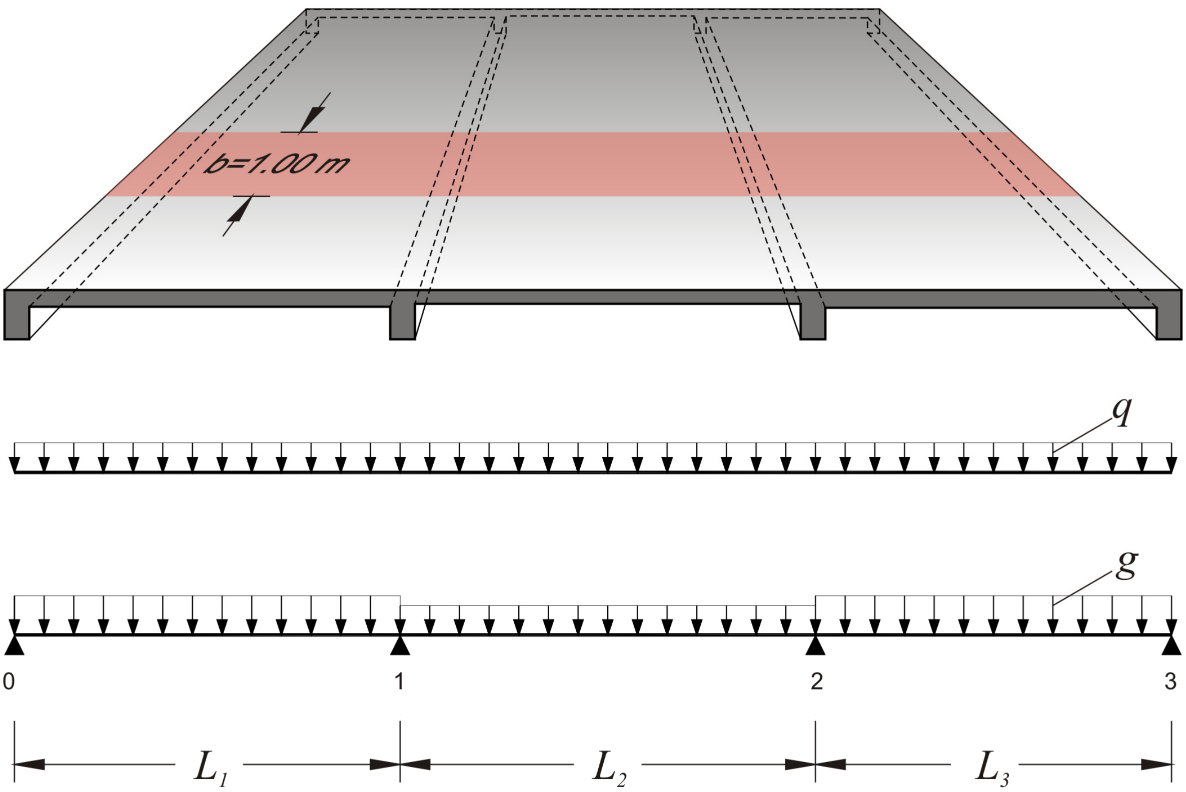
4.5.1 Στατική επίλυση

Οι συνεχείς αμφιέρειστες πλάκες επιλύονται με τη θεώρηση συνεχούς ραβδωτού φορέα, του οποίου κάθε ράβδος έχει ορθογωνική διατομή πλάτους 1.00 m και ύψους όσο το πάχος της πλάκας. Οι λωρίδες φορτίζονται με τα ίδια βάρη, τα μόνιμα και τα κινητά φορτία που εξασκούνται σ' αυτές.

Η επίλυση πραγματοποιείται:

α) προσεγγιστικά με την εφαρμογή του συνόλου των φορτίων σχεδιασμού p=1.35g+1.50q (όταν το κινητό φορτίο είναι σχετικά μικρό)

β) είτε με ακρίβεια λαμβάνοντας δυσμενείς φορτίσεις.



Εικόνα 4.5.1-1: Συνεχής πλάκα τριών ανοιγμάτων

Παράδειγμα:

Οι 3 πλάκες (προηγούμενο σχήμα) έχουν L_1=4.50 m, h_1=180 mm, g_1=10.0 kN/m², q_1=2.0 kN/m², L_2=4.00 m, h_2=140 mm, g_2=5.0 kN/m², q_2=2.0 kN/m², L_3=4.00 m, h_3=140 mm, g_3=5.0 kN/m², q_3=2.0 kN/m², όπου τα φορτία g περιλαμβάνουν και το ίδιο βάρος. Ζητείται η στατική επίλυση των πλακών θεωρώντας καθολική φόρτιση για κατάσταση αστοχίας.

Το φορτίο σχεδιασμού σε κάθε πλάκα ισούται με $p_i=\gamma_g \cdot g_i+\gamma_q \cdot q_i=1.35 \cdot g_i+1.50 \cdot q_i$, οπότε σε ζώνη πλάτους 1.00 m ισχύει ότι:

$p_1=1.35\times10.0+1.50\times2.0=16.5$ kN/m

$p_2=p_3=1.35\times5.0+1.50\times2.0=9.75$ kN/m

Η συνεχής πλάκα 3 ανοιγμάτων θα υπολογισθεί με τη μέθοδο Cross.

Θεμελιώδεις ροπές ανοιγμάτων (πίνακας b3)

$M_{10}=-p_1 \cdot L_1^2/8=-16.5\times4.50^2/8=-41.8$ kNm

$M_{12}=M_{21}=-p_2 \cdot L_2^2/12=-9.75\times4.00^2/12=-13.0$ kNm

$M_{23}=-p_3 \cdot L_3^2/8=-9.75\times4.00^2/8=-19.5$ kNm

Ροπές αδράνειας I

$I_{01}=I_c=1.0\times0.18^3/12=4.86\times10^{-4}\ m^4$

$I_{12}=I_{23}=1.0\times0.14^3/12=2.29\times10^{-4}\ m^4=0.47I_c$

Συντελεστές δυσκαμψίας k, δείκτες κατανομής υ

$$k_{10}=\frac{3I_{10}}{4I_c \cdot L_{01}}=\frac{3}{4\times4.5}= \quad 0.167 \qquad \upsilon_{01}=\frac{0.167}{0.285} \quad 0.586$$

$$k_{12}=\frac{4I_{12}}{4I_c \cdot L_{12}}=\frac{4\times0.47I_c}{4I_c\times4.0}= \quad 0.118 \qquad \upsilon_{12}=\frac{0.118}{0.285} \quad 0.414$$

$$0.285 \qquad\qquad 1.000$$

$$k_{21}=k_{12}= \quad 0.118 \qquad \upsilon_{21}=\frac{0.118}{0.206} \quad 0.573$$

$$k_{23}=\frac{3I_{23}}{4I_c \cdot L_{23}}=\frac{3\times0.47I_c}{4I_c\times4.0}= \quad 0.088 \qquad \upsilon_{01}=\frac{0.088}{0.206} \quad 0.427$$

$$0.206 \qquad\qquad 1.000$$

1			2	
0.586	0.414		0.573	0.427
+41.8	-13.0		+13.0	-19.5
-[+41.8-13.0]×0.586→ - 16.9	-11.9	→0.50	- 6.0	
	+ 3.6	0.50←	+ 7.2	+ 5.3 ← 0.427×[-(+13.0-19.5-6.0)]
-[+3.6]×0.586→ - 2.1	- 1.5	→0.50	- 0.8	
	+ 0.3	0.50←	+ 0.5	+ 0.3 ← 0.427×[-(-0.8)]
-[+0.3]×0.586→ - 0.2	- 0.1			
+22.6	-22.6		+13.9	-13.9

M_1=-22.6 kNm $\qquad$ M_2=-13.9 kNm

$V_{01}=16.5\times4.50/2-22.6/4.50=32.1\ kN$

$V_{10}=-16.5\times4.50/2-22.6/4.50=-42.1\ kN$

$V_{12}=9.75\times4.00/2+(-13.9+22.6)/4.00=21.7\ kN$

$V_{21}=-9.75\times4.00/2+(-13.9+22.6)/4.00=-17.3\ kN$

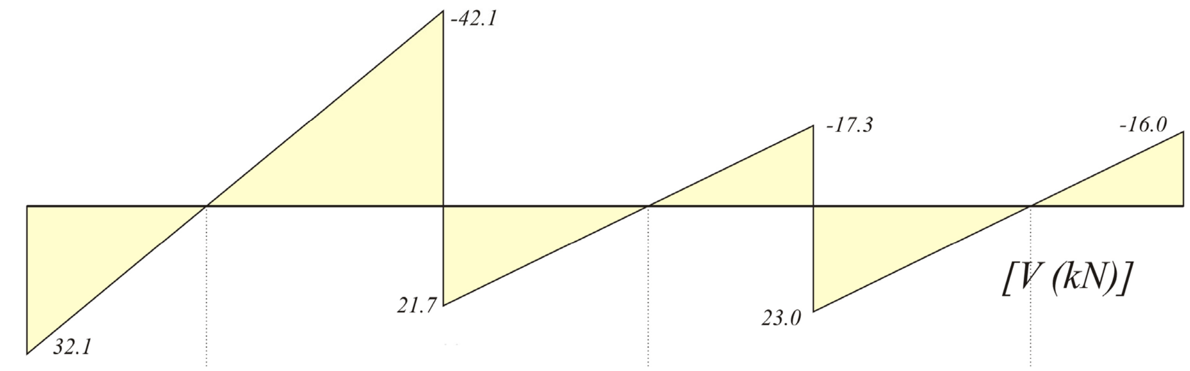
$V_{23}=9.75\times4.00/2+13.9/4.00=23.0\ kN$

$V_{32}=-9.75\times4.00/2+13.9/4.00=-16.0\ kN$

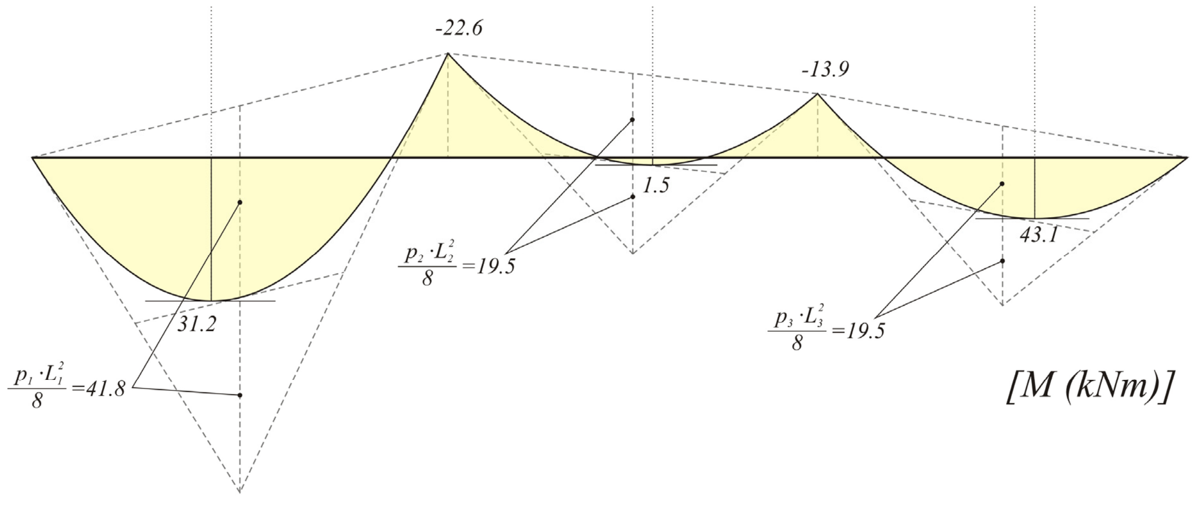
$maxM_{01}=32.1^2/(2\times16.5)=31.2\ kNm$

$maxM_{12}=21.7^2/(2\times9.75)-22.6=1.5\ kNm$

$maxM_{23}=16.0^2/(2\times9.75)=13.1\ kNm$



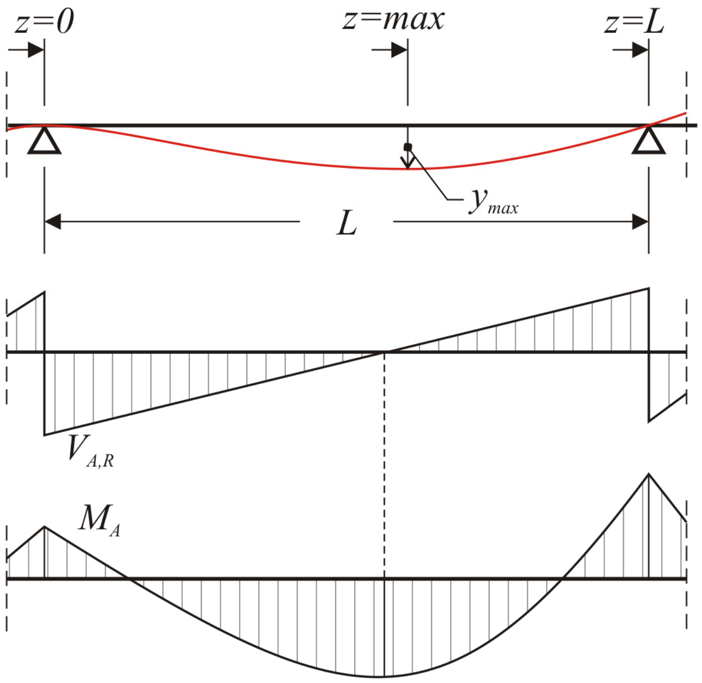
Εικόνα 4.5.1-2: Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων



Εικόνα 4.5.1-3: Διάγραμμα ροπών κάμψης

4.5.2 Βέλος κάμψης

Έστω ΑΒ ράβδος πλάκας με μήκος L, ροπή αδράνειας I, μέτρο ελαστικότητας E, στην οποία ασκείται ομοιόμορφο φορτίο p. Με γνωστή την τέμνουσα $V_{A,R}$ (αριστερή στήριξη) και τη ροπή M_A, ζητείται η εξίσωση της ελαστικής γραμμής λόγω κάμψης και το μέγιστο βέλος κάμψης.



Εικόνα 4.5.1-6: Γενική περίπτωση κάμψης ράβδου (πλάκας ή δοκού)

Θεωρώντας ως αρχή των z το αριστερό άκρο της ράβδου έχουμε:

$$V(z) = V_{A,R} - p \cdot z$$

$$M(z) = M_A + V_{A,R} \cdot z - \frac{p \cdot z^2}{2}$$

Η βασική εξίσωση της ελαστικής γραμμής $E \cdot I \cdot \frac{d^2 y(z)}{dz^2} = -M(z)$ επιλύεται σε δύο φάσεις:

<u>1η φάση</u>

$$\varphi(z) = \frac{dy(z)}{dz} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int -M(z)dz = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int (-M_A - V_{A,R} \cdot z + \frac{p \cdot z^2}{2})dz \rightarrow$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (-M_A \cdot z - \frac{V_{A,R} \cdot z^2}{2} + \frac{p \cdot z^3}{6} + C_1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της ελαστικής γραμμής ισούται με:

$$\varphi(z) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (\frac{p}{6} \cdot z^3 - \frac{V_{A,R}}{2} \cdot z^2 - M_A \cdot z + C_1) \quad (1)$$

2η φάση

$$y(z)=\int \varphi(z)dz=\frac{1}{E\cdot I}\cdot\int(\frac{p}{6}\cdot z^3-\frac{V_{A,R}}{2}\cdot z^2-M_A\cdot z+C_1)dz\rightarrow$$

$$y(z)=\frac{1}{E\cdot I}\cdot(\frac{p}{24}\cdot z^4-\frac{V_{A,R}}{6}\cdot z^3-\frac{M_A}{2}\cdot z^2+C_1\cdot z+C_2)$$

$y(0)=0 \rightarrow C_2=0$

Η εξίσωση της ελαστικής γραμμής ισούται τότε με:

$$y(z)=\frac{1}{E\cdot I}\cdot(\frac{p}{24}\cdot z^4-\frac{V_{A,R}}{6}\cdot z^3-\frac{M_A}{2}\cdot z^2+C_1\cdot z)\ (2)$$

$y(L)=0 \rightarrow$

$$0=\frac{1}{E\cdot I}\cdot(\frac{p\cdot L^4}{24}-\frac{V_{A,R}\cdot L^3}{6}-\frac{M_A\cdot L^2}{2}+C_1\cdot L)\rightarrow C_1=-\frac{p\cdot L^3}{24}+\frac{V_{A,R}\cdot L^2}{6}+\frac{M_A\cdot L}{2}\ (3)$$

Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της ελαστικής γραμμής (1) και η εξίσωση του βέλους κάμψης (2) είναι πλέον γνωστές.

Η θέση στην οποία εμφανίζεται το μέγιστο βέλος κάμψης είναι το σημείο στο οποίο μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος του, δηλαδή το σημείο z στο οποίο φ(z)=0.

$$(1)\rightarrow \frac{p\cdot z^3}{6}-\frac{V_{A,R}\cdot z^2}{2}-M_A\cdot z+C_1=0\ (4)$$

Η συμβατή λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης (3) δίνει το ζητούμενο σημείο z_{max}, το οποίο αντικαθίσταται στην εξίσωση (2) και προκύπτει το μέγιστο βέλος κάμψης y_{max}.

Παράδειγμα: ***Βέλος κάμψης της πρώτης πλάκας*** *(του παραδείγματος της §4.3.1):*

Για L=4.5 m, p=16.5 kN/m, $V_{A,R}$=32.1 kN και M_A=0.0, από την (3) προκύπτει ότι:

$$C_1=-\frac{16.5\times4.5^3}{24}+\frac{32.1\times4.5^2}{6}kN\cdot m^2=45.7\ kN\cdot m^2$$

$(4)\rightarrow(16.5/6)\cdot z^3-(32.1/2)\cdot z^2-0+45.7=0\rightarrow 2.75z^3-16.05z^2+45.7=0\rightarrow z_{max}=2.112\ m$

$(2)\rightarrow y(z)=\frac{1}{E\cdot I}\cdot(0.6875\cdot z^4-5.35\cdot z^3+45.7\cdot z)\quad(1.2)$

$$y(2.112)=\frac{1}{E\cdot I}\cdot(0.6875\times2.112^4-5.35\times2.112^3+45.7\times2.112)\cdot10^3N\cdot m^3=\frac{59.8}{E\cdot I}\cdot10^3N\cdot m^3$$

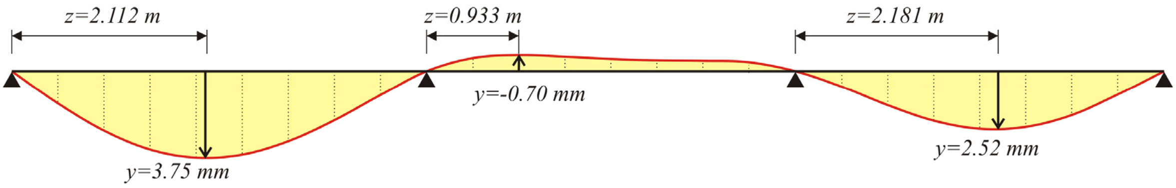
Για πάχος πλάκας h=180 mm και μέτρο ελαστικότητας σκυροδέματος E=32.80 GPa έχουμε ότι:

$I=(b\cdot h^3)/12=(1.0\times0.18^3)/12=486\times10^{-6}\ m^4$

$E\cdot I=32.8\times10^9N/m^2\times486\times10^{-6}m^4=15.9408\times10^6\ N\cdot m^2$, *άρα,*

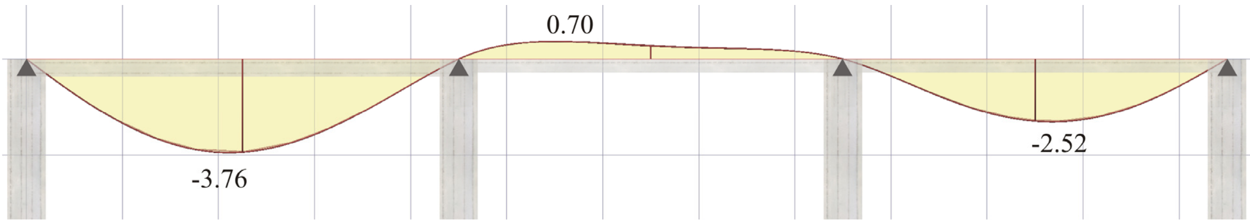
$$y_{1,max}=y(2.112)=\frac{59.8\cdot10^3N\cdot m^3}{15.9408\cdot10^6N\cdot m^2}=0.00375\ m=3.75\ mm$$

Η ελαστική γραμμή της συνεχούς πλάκας που προκύπτει από τις εξισώσεις (1.2), (2.2), (3.2) είναι η ακόλουθη:



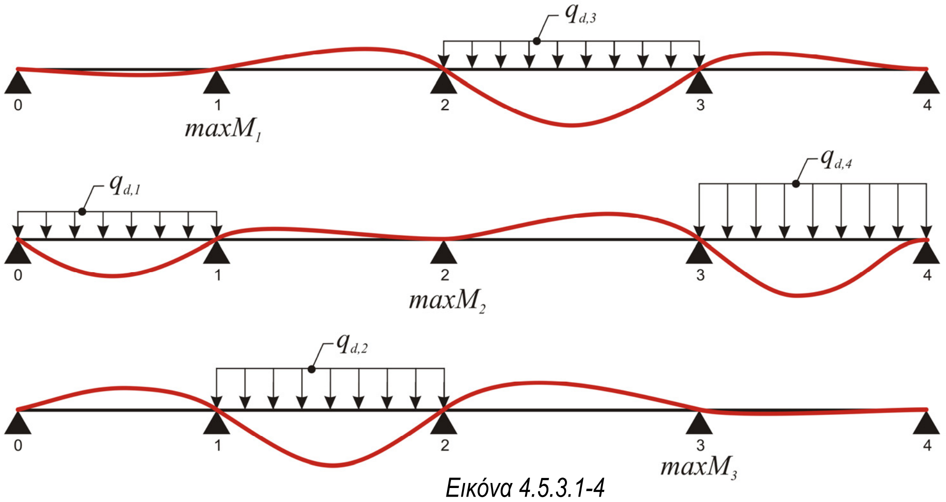
Εικόνα 4.5.1-7: Η ελαστική γραμμή από τις εξισώσεις των 3 πλακών

Η μελέτη <B_451> (pi-FES) εξάγει τις ταυτόσημες παραμορφώσεις:



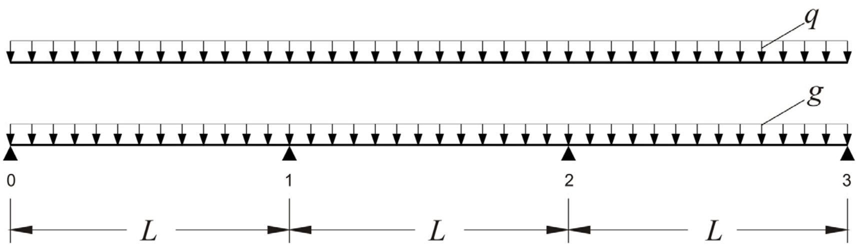
Εικόνα 4.5.1-8: Η ελαστική γραμμή από το pi-FES (Ενεργό module\SLABS) σε όψη

Μέγιστες ροπές στηρίξεων (κενή φόρτιση παρακείμενων ανοιγμάτων και εναλλάξ των υπολοίπων)



Εικόνα 4.5.3.1-4

Παράδειγμα:



Εικόνα 4.5.3.1-5

Η συνεχής πλάκα του σχήματος έχει σε κάθε άνοιγμα μήκος L=5.00 m και πάχος h=160 mm, ενώ καταπονείται από φορτίο επικάλυψης g_e=1.0 kN/m^2 και ωφέλιμο q=5.0 kN/m^2. Σκυρόδεμα C50/60. Ζητείται η περιβάλλουσα των ροπών και των τεμνουσών, σε οριακή κατάσταση αστοχίας, των τριών πλακών.

Επίλυση:

Ίδιο βάρος: $g_o=0.16m{\cdot}25.0kN/m^3=$ 4.00 kN/m^2

Επικάλυψη: $g_e=$ 1.00 kN/m^2

Σύνολο μόνιμων φορτίων: $g=$ 5.00 kN/m^2

Σύνολο ωφέλιμων φορτίων: $q=$ 5.00 kN/m^2

Το μόνιμο φορτίο σχεδιασμού κάθε πλάκας ισούται με $g_d=1.00\times5.0=5.0$ kN/m *και το συνολικό φορτίο σχεδιασμού με* $p_d=\gamma_g{\cdot}g+\gamma_q{\cdot}q=1.35\times5.0+1.50\times5.0=14.25$ kN/m.

Επίλυση με το χέρι:

$I=(b{\cdot}h^3)/12=(1.0\times0.16^3)/12=341\times10^{-6}\ m^4$

Το μέτρο ελαστικότητας για σκυρόδεμα C50/60 ισούται με E=37.3 GPa.

$E{\cdot}I=37.3\times10^9N/m^2\times341\times10^{-6}m^4=12.719\times10^6\ N{\cdot}m^2$

Επειδή $I_{10}=I_{12}=I_{23}=I_c$, *οι συντελεστές δυσκαμψίας k και οι δείκτες κατανομής υ ισούνται με:*

$$k_{10}=\frac{3I_{10}}{4I_c\cdot L_{01}}=\frac{3}{4\times5.0}=\quad 0.150 \qquad \upsilon_{01}=\frac{0.150}{0.350}=\quad 0.429$$

$$k_{12}=\frac{4I_{12}}{4I_c\cdot L_{12}}=\frac{4}{4\times5.0}=\quad \underline{0.200} \qquad \upsilon_{12}=\frac{0.200}{0.350}=\quad \underline{0.571}$$

$$0.350 \qquad\qquad 1.000$$

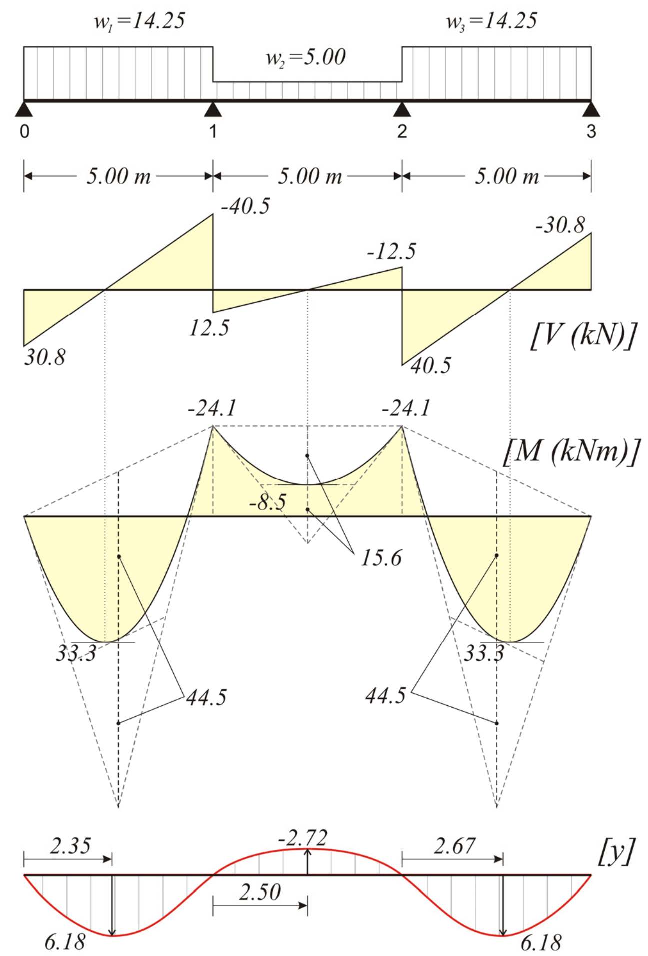
Λόγω συμμετρίας φορέα: $\upsilon_{21}=0.571$ *και* $\upsilon_{23}=0.429$

<u>Φόρτιση 1</u>: $w_1=w_3=p_d=14.25$ kN/m, $w_2=g_d=5.0$ kN/m ($V_{01,max}$, $M_{01,max}$, $M_{12,min}$, $|V_{32,max}|$, $M_{23,max}$)

Θεμελιώδεις ροπές πάκτωσης από τον πίνακα b3 →

$M_{10}=M_{23}=-w_1 \cdot L^2/8=-14.25\times5.0^2/8=-44.5$ kNm, $M_{12}=M_{21}=-w_2 \cdot L^2/12=-5.0\times5.0^2/12=-10.4$ kNm

0.429	0.571		0.571	0.429
+44.5	-10.4		+10.4	-44.5
-[+44.5-10.4]×0.429→ -14.6	-19.5	→0.50	- 9.8	
	+12.5	0.50←	+ 25.1	+18.8← 0.429×[-(+10.4-44.5-9.8)]
-[+12.5×0.429]→ -5.3	- 7.2	→0.50	- 3.6	
	+ 1.1	0.50←	+ 2.1	+ 1.5 ← 0.429×[-(-3.6)]
-[+1.1×0.586]→ -0.6	- 0.5	→0.50	-0.3	
			+0.2	+ 0.1 ← 0.429×[-(-0.3)]
+24.1	-24.1		+24.1	-24.1
M_1=-24.1 kNm			M_2=-24.1 kNm	



Εικόνα 4.5.3.1-6

$V_{01}=14.25\times5.0/2-24.1/5.0=35.63-4.82=30.8$ kN

$V_{10}=-35.63-4.82=-40.5$ kN

$V_{12}=5.0\times5.0/2=12.5$ kN

$M_{01,max}=V_{01}^2/(2 \cdot w_1)=30.8^2/(2\times14.25)=33.3$ kNm

$w_1 \cdot L^2/8=14.25\times5.0^2/8=44.5$ kNm

$M_{12,min}=V_{12}^2/(2 \cdot w_2)+M_1=12.5^2/(2\times5.0)-24.1=15.6-24.1=$

$=-8.5$ kN [12]

$w_2 \cdot L^2/8=5.0\times5.0^2/8=15.6$ kNm

01: (3) →

$C_1=(-14.25\times5.0^3/24+30.8\times5.0^2/6)=54.1$ kN·m²

(4) →$(14.25/6)z^3-(30.8/2)z^2-0+54.1=0$ →

$2.375z^3-15.4z^2+54.1=0$ που δίνει λύση $z_{max}=2.347$ m

(2) →$y(z)=1/12.719\times[(14.25/24)\times2.347^4-(30.8/6)\times2.347^3+0\times2.347^2+54.1\times2.347)]$ →

$y(2.335)=6.18$ mm

12: Λόγω συμμετρίας φορέα και φόρτισης, είναι $z_{max}=2.5$ 0m

$C_1=(-5.00\times5.0^3/24+12.5\times5.0^2/6-24.1\times5.0/2)$kN·m² =

$=-34.2$ kN·m²

(2) → $y(z)=1/12.719\times[(5.00/24)\times2.50^4-(12.5/6)\times2.50^3+24.1\times2.50^2/2-34.2\times2.50)$ → $y(2.50)=-2.72$ mm

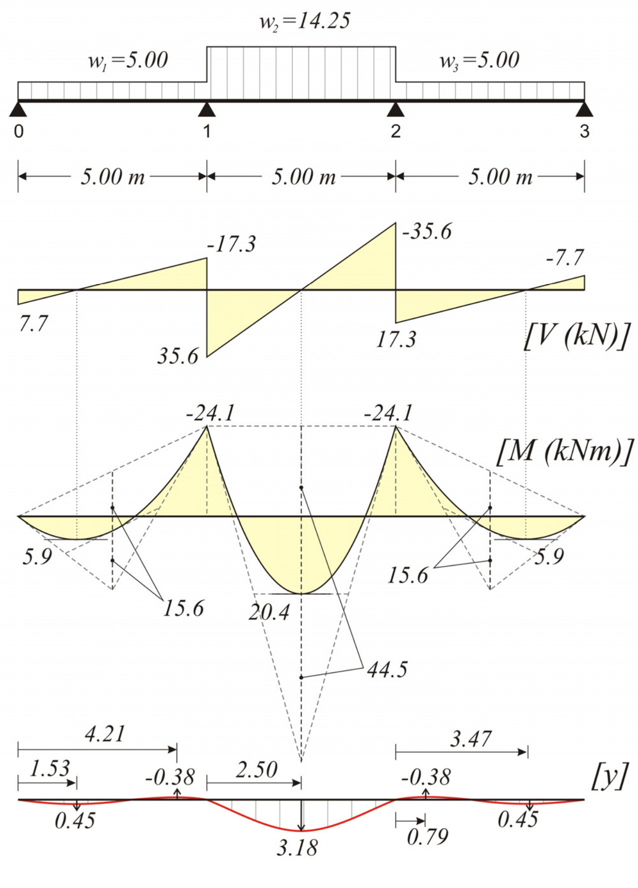
[12] Ο άλλος τρόπος υπολογισμού είναι: $M_{12}=w_1 \cdot L^2/8+M_1=5.0 \cdot 5.0^2/8-24.1=15.6-24.1=-8.5$ kNm

__Φόρτιση 2__: $w_1=w_3=g_d=5.0$ kN/m, $w_2=p_d=14.25$ kN/m ($V_{01,min}$, $M_{01,min}$, $M_{23,max}$, $|V_{32,min}|$, $M_{23,min}$)

Θεμελιώδεις ροπές πάκτωσης από τον πίνακα b3 →

$M_{10}=M_{23}=-w_1 \cdot L^2/8=-5\times5.0^2/8=-15.6$ kNm, $M_{12}=M_{21}=-w_2 \cdot L^2/12=-14.25\times5.0^2/12=-29.7$ kNm

0.429	0.571		0.571	0.429
+15.6	-29.7		+29.7	-15.6
-[+15.6-29.7]×0.429→ +6.1	+ 8.0	→0.50	+4.0	
	- 5.2	0.50←	-10.3	-7.8←0.429×[-(+29.7-15.6+4.0)]
-[-5.2]×0.429→ +2.2	+ 3.0	→0.50	+1.5	
	- 0.5	0.50←	-0.9	-0.6 ← 0.429×[-(+1.5)]
-[+0.5]×0.586→ + 0.2	+ 0.3	→0.50	+0.2	
			- 0.1	- 0.1 ← 0.429×[-(+0.2)]
+24.1	-24.1		+24.1	-24.1
M_1=-24.1 kNm			M_2=-24.1 kNm	



Εικόνα 4.5.3.1-7

$V_{01}=5.0\times5.0/2-24.1/5.0=12.5-4.8=7.7$ kN

$V_{10}=-12.5-4.8=-17.3$ kN

$V_{12}=14.25\times5.0/2=35.6$ kN

$M_{01,max}=V_{01}^2/(2\cdot w_1)=7.7^2/(2\times5.0)=5.9$ kNm

$w_1\cdot L^2/8=5\times5.0^2/8=15.6$ kNm

$M_{12,max}=V_{12}^2/(2\cdot w_2)+M_1=35.6^2/(2\times14.25)-24.1=44.5-24.1=20.4$ kNm

$w_2\cdot L^2/8=14.25\times5.0^2/8=44.5$ kNm

01: (3) →

$C_1=(-5.00\times5.0^3/24+7.7\times5.0^2/6)$ kN·m² $=6.0$ kN·m²

(4) → $(5.00/6)z^3-(7.7/2)z^2-0+6.0=0$ →

$0.833z^3-3.85z^2+6.0=0$ που δίνει λύσεις $z_{max,1}=1.53$ m και $z_{max,2}=4.21$ m

(2) → $y(z1)=1/12.719\times[(5.00/24)\times1.53^4-(7.7/6)\times1.53^3+0\times1.53^2+6.0\times1.53)$ → $y(1.53)=0.45$ mm

(2) → $y(z2)=1/12.719\times[(5.00/24)\times4.21^4-(7.7/6)\times4.21^3+0\times4.21^2+6.0\times4.21)$ → $y(4.21)=-0.39$ mm

12: Λόγω συμμετρίας φορέα και φόρτισης, είναι $z_{max}=2.50$ m

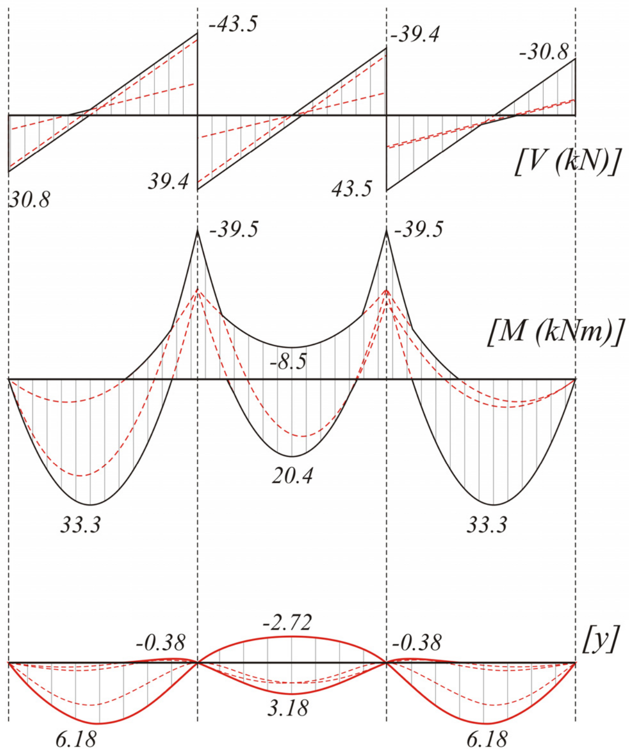
$C_1=(-14.25\times5.0^3/24+35.6\times5.0^2/6-24.1\times5.0/2)$ kN·m² $=$ $=13.9$ kN·m²

(2) → $y(z)=1/12.719\times[(14.25/24)\times2.50^4-(35.6/6)\times2.50^3+24.1\times2.50^2/2+13.9\times2.50)$ → $y(2.50)=3.18$ mm

<u>Φόρτιση 4</u>: $w_1=g_d=5.0$ kN/m $w_2=w_3=p_d=14.25$ kN/m

Η φόρτιση αυτή είναι η αντισυμμετρική ως προς το μέσο της φόρτισης 3.

<u>Περιβάλλουσες όλων των φορτίσεων:</u>



Εικόνα 4.5.3.1-9: Περιβάλλουσες τεμνουσών-ροπών-βελών κάμψης

Επίλυση με τον πίνακα b4

$g_d/p_d=5.0/14.25=0.35$

$m_1=10.695,\ m_B=-9.025,\ m_2=17.425,\ p_{1A}=2.315,\ p_{1B}=-1.635,\ p_{2B}=1.805$

$V_{01,max}=p_d{\cdot}L/p_{1A}=14.25\times5.0/2.315=30.8$ kN

$V_{10,min}=p_d{\cdot}L/p_{1B}=-14.25\times5.0/1.635=-43.6$ kN

$V_{12,max}=p_d{\cdot}L/p_{2B}=14.25\times5.0/1.805=39.5$ kN

$M_{01,max}=p_d{\cdot}L^2/m_1=14.25\times5.0^2/10.695=33.3$ kNm

$M_{1,min}=p_d{\cdot}L^2/m_B=-14.25\times5.0^2/9.025=-39.5$ kNm

$M_{12,max}=p_d{\cdot}L^2/m_2=14.25\times5.0^2/17.425=20.4$ kNm

Η επίλυση με τον πίνακα είναι πολύ εύκολη, το πρόβλημα όμως είναι ότι δεν δίνει την αρνητική τιμή της ροπής του μεσαίου ανοίγματος.